

Licence 1ère année, MATHÉMATIQUES ET CALCUL 2 (MC2)

Interrogation 2 : Géométrie et intégration

Exercice 1. (7 pts)

Soit $u = (0, 1, 1)$, $v = (1, 3, 1)$ et $w = (0, -2, 2)$. On rappelle que pour $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, $\langle a \wedge b, c \rangle = \det(a, b, c)$

1. Calculer $\det(u, v, w)$. Sans calcul (mais en justifiant) donnez la valeur de $\det(v, u, w)$ et $\det(u, u, w)$.
2. Déterminer un vecteur orthogonal à v .
3. Calculer le produit scalaire $\langle u, w \rangle$. Que peut-on en déduire ?
4. Calculer le produit vectoriel $u \wedge w$. En déduire la nature (libre, liée, base etc.) de la famille $(u, w, u \wedge w)$.
5. Donner les définitions ensemblistes à l'aide des équations paramétriques, cartésiennes et matricielles du plan engendré par u et w .

Correction.

1. Calcul du déterminant :

$$\det(u, v, w) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\det(u, v, w) = -1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1(1 \times 2 - (-2) \times 1) = -4$$

Échanger deux colonnes change le signe du résultat, donc $\det(v, u, w) = -(-4) = 4$. Avoir deux colonnes identiques rend le déterminant nul, donc $\det(u, u, w) = 0$.

2. Vecteur orthogonal à v : On cherche un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ tel que $\langle x, v \rangle = 0$, c'est-à-dire $x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$. En fixant arbitrairement $x_2 = 0$ et $x_1 = 1$, on trouve $x_3 = -1$. Le vecteur $(1, 0, -1)$ est donc orthogonal à v . (*D'autres choix sont possibles*).

3. Produit scalaire $\langle u, w \rangle$:

$$\langle u, w \rangle = 0 \times 0 + 1 \times (-2) + 1 \times 2 = -2 + 2 = 0$$

Le produit scalaire étant nul, les vecteurs u et w sont orthogonaux.

4. Produit vectoriel $u \wedge w$:

$$u \wedge w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 - 1 \times (-2) \\ 1 \times 0 - 0 \times 2 \\ 0 \times (-2) - 1 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs u et w sont non nuls et orthogonaux entre eux. Par définition du produit vectoriel, $u \wedge w$ est un vecteur non nul orthogonal à la fois à u et à w . La famille $(u, w, u \wedge w)$ est donc formée de trois vecteurs 2 à 2 orthogonaux et non nuls en dimension 3. C'est une **base orthogonale** de $\mathbb{R}^3$.

On peut aussi dire que $\det(u, w, u \wedge w) = \langle u \wedge w, u \wedge w \rangle = \|u \wedge w\|^2 = 4^2 = 16 \neq 0$. Donc la famille est libre et donc forme une base de $\mathbb{R}^3$. De plus les vecteurs sont 2 à 2 orthogonaux, donc la base est orthogonale

5. Définitions du plan P engendré par u et w :

— **Définition paramétrique :** P est l'ensemble des combinaisons linéaires de u et w .

$$\begin{aligned} P &= \{ \lambda(0, 1, 1) + \mu(0, -2, 2) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ (0, \lambda - 2\mu, \lambda + 2\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} \\ &= \text{Vect}(u, w) \end{aligned}$$

— **Définition cartésienne :** Un vecteur normal au plan est $u \wedge w = (4, 0, 0)$ d'après la question précédente. Donc

$$\begin{aligned} P &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (x, y, z), u \wedge w \rangle = 0 \} \\ &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x = 0 \} \\ &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \} \end{aligned}$$

— **Définition matricielle :** C'est une réécriture de la définition cartésienne.

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Exercice 2. (3 pts)

Donner l'ensemble des primitives des fonctions ci-dessous. On commencera par justifier l'existence de primitives.

a) $t \mapsto 2 \frac{t^6}{t^7 + 2}$

b) $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$

c) $t \mapsto \sin(t) \cos^3(t)$

Correction.

1. **Fonction** $f : t \mapsto 2 \frac{t^6}{t^7 + 2}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt[7]{-2}\}$ donc admet des primitives sur cet ensemble. On multiplie et on divise par 7 pour faire apparaître une forme $\frac{u'}{u}$:

$$\frac{2}{7} \times \frac{7t^6}{t^7 + 2}$$

En posant $u(t) = t^7 + 2$, on a $u'(t) = 7t^6$. Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln(|u|)$. L'ensemble des primitives est :

$$\{F : t \mapsto \frac{2}{7} \ln(|t^7 + 2|) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$

2. **Fonction** $g : t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$ g est définie et continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, donc admet des primitives sur cet ensemble.

On réécrit la fonction pour bien voir la forme $\frac{u'}{u}$:

$$\frac{1/t}{\ln(t)}$$

En posant $u(t) = \ln(t)$, on a $u'(t) = \frac{1}{t}$. L'ensemble des primitives est :

$$\{G : t \mapsto \ln(|\ln(t)|) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$

3. **Fonction** $h : t \mapsto \sin(t) \cos^3(t)$ La fonction h est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur cet ensemble. On fait apparaître la forme $-u'u^3$ en posant $u(t) = \cos(t)$ et $u'(t) = -\sin(t)$:

$$h(t) = -(-\sin(t)) \cos^3(t)$$

Une primitive de $u'u^3$ étant $\frac{1}{4}u^4$, l'ensemble des primitives est :

$$\{H : t \mapsto -\frac{1}{4} \cos^4(t) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$
