

Licence 1ère année, MATHÉMATIQUES ET CALCUL 2 (MC2)

Interrogation 2 : Sommes de Riemann (bonus)

Exercice 1.

Ecrire sous forme de somme de Riemann et calculer la limite de la suite (S_n) définie pour tout entier $n > 0$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$$

Correction.

Pour faire apparaître une somme de Riemann, on factorise par n^2 sous la racine carrée au dénominateur :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{2k}{n}\right)}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n \sqrt{1 + 2\frac{k}{n}}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{k}{n}}} \end{aligned}$$

On reconnaît une somme de Riemann de la forme $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2x}}$$

La fonction f étant continue sur $[0, 1]$, la suite (S_n) converge donc vers l'intégrale de f sur $[0, 1]$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + 2x}} dx$$

Pour calculer cette intégrale, on remarque que la fonction à intégrer est de la forme $\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ en posant $u(x) = 1 + 2x$ (ce qui donne $u'(x) = 2$). Une primitive de cette fonction est $\sqrt{u(x)}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = [\sqrt{1 + 2x}]_0^1 = \sqrt{1 + 2(1)} - \sqrt{1 + 0} = \sqrt{3} - 1$$