Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, MATHÉMATIQUES ET CALCUL 2 (MC2)

Interrogation 3 : Intégration

Sauf indication contraire, les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1. 6 pts

1. A l'aide du changement de variable $u = \ln(t)$, calculer $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)+1}}\,\mathrm{d}t$ (2 pts)

2. On pose $Q(X) = \dfrac{2X^2+3}{X^3-6X^2+9X}$

2.1. Déterminer la décomposition en éléments simples de $Q(X)$ (3 pts)

2.2. Calculer $\displaystyle\int_1^2 Q(t)\,\mathrm{d}t$ (1 pt)

<u>Correction.</u>

1. Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{\ln(t)+1}}$

f est définie et continue sur $[1, e]$ donc l'intégrale existe.

On fait le changement de variable $\mathcal{C}^1$ suivant : $u = \ln(t)$ ($\mathrm{d}u = \dfrac{1}{t}\mathrm{d}t$)

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)+1}}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u+1}}\,\mathrm{d}u \\
&= [2\sqrt{u+1}]_0^1 \\
&= 2\sqrt{2}-2 \\
&= 2(\sqrt{2}-1)
\end{aligned}$$

2. 2.1. Puisque $\deg(2X^2+3)<\deg(X^3-6X^2+9X)$, il n'y a pas besoin de faire de division euclidienne ici.

$$Q(X) = \frac{2X^2+3}{X^3-6X^2+9X} = \frac{2X^2+3}{X(X-3)^2}$$

On cherche $a_1, a_2, b_1 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$Q(X) = \frac{a_1}{X-3} + \frac{a_2}{(X-3)^2} + \frac{b_1}{X}$$

En multipliant par $Q(X)$ par X et en calculant $\lim_{x\to 0} xQ(x)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} xQ(x) &= \lim_{x\to 0} x\frac{a_1}{x-3} + x\frac{a_2}{(x-3)^2} + b_1 = b_1 \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2+3}{(x-3)^2} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

D'où $b_1 = \dfrac{1}{3}$

En multipliant par $Q(X)$ par $(X-3)^2$ et en calculant $\lim_{x\to 3} (x-3)^2Q(x)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} (x-3)^2Q(x) &= \lim_{x\to 3} (x-3)a_1 + a_2 + (x-3)^2\frac{b_1}{x} = a_2 \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{2x^2+3}{x} = 7
\end{aligned}$$

D'où $a_2 = 7$
Enfin, on peut trouver a_1 en multipliant Q(X) par X-3 et en calculant $\lim_{x\to+\infty} (x-2)Q(x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} (x-3)Q(x) &= \lim_{x\to+\infty} a_1 + \frac{a_2}{x-3} + (x-3)\frac{b_1}{x} = a_1 + b_1 = a_1 + \frac{1}{3} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3}{x(x-3)} = 2\end{aligned}$$

D'où $a_1 + \frac{1}{3} = 2 \Leftrightarrow a_1 = \frac{5}{3}$
La décomposition en élements simples de Q est

$$Q(X) = \frac{5}{3}\frac{1}{X-3} + \frac{7}{(X-3)^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{X}$$

2.2. $t \mapsto Q(t)$ est définie et continue sur $[1,2]$ donc l'intégrale existe.

$$\begin{aligned}\int_1^2 Q(t)dt &= \int_1^2 \frac{5}{3}\frac{1}{t-3} + \frac{7}{(t-3)^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{t}dt \\ &= [\frac{5}{3}ln(|t-3|) - 7\frac{1}{t-3} + \frac{1}{3}ln(|t|)]_1^2 \\ &= 7 + \frac{1}{3}ln(2) - \frac{5}{3}ln(2) - \frac{7}{2} \\ &= \frac{7}{2} - \frac{4}{3}ln(2)\end{aligned}$$

Exercice 2. 4 pts

1. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln(1+x)}}{x\sqrt{x+1}}\, \mathrm{d}x$ (4 pts)

Correction.

1. On pose $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{\ln(1+x)}}{x\sqrt{x+1}}$.
f est définie, continue et positive sur $]0, +\infty[$.
Etude au voisinage de 0 :
$\ln(1+x) \sim_0 x$ donc $f(x) \sim_0 \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$)
Donc par critère d'équivalence $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ converge.
Etude au voisinage de $+\infty$:
$f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{x^{\frac{3}{2}}}$
Par croissance comparées, $\dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{x^{0.00001}} \to_{+\infty} 0$
Donc $\exists x_0 > 0,\ \forall x \geq x_0$,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\ln(x)}}{x^{0.00001}} \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{\ln(x)} \leq x^{0.00001} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{x^{1.49999}}\end{aligned}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1.49999}} dx$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = 1.49999 > 1$).

La fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x^{\frac{3}{2}}}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$, donc par critère de majoration, $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ converge.

Finalement, par critère d'équivalence $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln(1+x)}}{x\sqrt{x+1}}\, \mathrm{d}x$ converge.

Enfin, par la relation de Chasles, nous pouvons conclure que $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln(1+x)}}{x\sqrt{x+1}}\, \mathrm{d}x$ converge.
