Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, Mathématiques et Calcul 2 (MC2)
Interrogation 0 : Algèbre Linéaire

Exercice 1. 4 pts

On considère $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ 2x + 3y = z\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. (2pts)
2. Déterminer une base de F. Quelle est la dimension de F ? (1.5pts + 0.5pts)

Correction.

1. — $F \subset \mathbb{R}^3$
   — $(0,0,0) \in F$ car $2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$
   — Soient $u = (x,y,z) \in F,\ v = (x',y',z') \in F,\ \lambda \in \mathbb{R}$.
   $u + \lambda v = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')$.

$$\begin{aligned} 2(x+\lambda x') + 3(y + \lambda y') &= 2x + 2\lambda x + 3y + 3\lambda y' \\ &= 2x + 3y + \lambda(2x' + 3y') \\ &= z + \lambda z' \qquad \text{car } (x,y,z) \in F \text{ et } (x',y',z') \in F \end{aligned}$$

Donc $u + \lambda v \in F$

F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

2.

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ 2x + 3y = z\} \\ &= \{(x,y,2x+3y) / \ x,y \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x,0,2x) + (0,y,3y) / \ x,y \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(1,0,2) + y(0,1,3) / \ x,y \in \mathbb{R}^3\} \\ &= Vect\left((1,0,2),(0,1,3)\right) \end{aligned}$$

La famille $((1,0,2),(0,1,3))$ est une famille génératrice de F. Montrons que cette famille est libre. On pose $u_1 = (1,0,2)$ et $u_2 = (0,1,3)$.
Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = (0,0,0) &\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \alpha_1 & = & 0 \\ \alpha_2 & = & 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 & = & 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

La famille $((1,0,2),(0,1,3))$ est libre. Puisqu'elle est aussi génératrice, c'est donc une base de F. La dimension de F est le cardinal d'une base de F donc on en conclut que $dim(F) = card((1,0,2),(0,1,3)) = 2$

Exercice 2. 9 pts

On considère $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(2) - P(1), P(4)) \end{array} \right.$.
On admet que f est une application linéaire.

1. f est-elle une forme linéaire ? f est-elle un endomorphisme ? (0.5pts + 0.5pts)
2. Donner les base canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de f dans ces bases. Dans la suite, on notera M cette matrice. (0.5pts + 1.5pts)
3. Calculer le déterminant de M. f est-elle un isomorphisme ? (1.5pts + 0.5 pts)
4. Si cela est possible, calculer M^{-1}. (4pts)

Correction.

1. f n'est pas une forme linéaire car l'espace d'arrivée n'est pas $\mathbb{R}$. f n'est pas un endomorphisme car les espaces de départ et d'arrivée sont différents.
2. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_2[X]} = (1, X, X^2)$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$. Déterminons $M = Mat_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}_2[X]},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}(f)$.
   — $f(1) = (1,0,1) = 1 \times (1,0,0) + 0 \times (0,1,0) + 1 \times (0,0,1)$
   — $f(X) = (0, 2-1, 4) = (0,1,4) = 0 \times (1,0,0) + 1 \times (0,1,0) + 4 \times (0,0,1)$
   — $f(X^2) = (0, 2^2 - 1^2, 4^2) = (0,3,16) = 0 \times (1,0,0) + 3 \times (0,1,0) + 16 \times (0,0,1)$

$M = Mat_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}_2[X]},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$

3. Pour calculer le déterminant de M, développons par rapport à la 1ère ligne.

$$det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = 16 - 3 \times 4 = 4$$

$det(M) = 4 \neq 0$, donc f est un isomorphisme.

4. M est inversible car $det(M) \neq 0$.
On applique la méthode du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 16 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - \dfrac{3}{4} L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & 4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow \dfrac{1}{4} L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & 4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 4 & -1/4 & -1 & 1/4 \end{array}\right)$$

Nous trouvons donc que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 4 & -3/4 \\ -1/4 & -1 & 1/4 \end{pmatrix}$.
