Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, Mathématiques et Calcul 2 (MC2)

Interrogation 1 : Algèbre Linéaire

Exercice 1. 4 pts

On considère $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ 4x - y = -z\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. (2pts)
2. Déterminer une base de F. Quelle est la dimension de F ? (1.5pts + 0.5pts)

Correction.

1. — $F \subset \mathbb{R}^3$
   — $(0, 0, 0) \in F$ car $4 \times 0 - 1 \times 0 = 0$
   — Soient $u = (x, y, z) \in F$, $v = (x', y', z') \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $u + \lambda v = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')$.

$$\begin{aligned} 4(x+\lambda x') - (y+\lambda y') &= 4x + 4\lambda x - y - \lambda y' \\ &= 4x - y + \lambda(4x' - y') \\ &= -(z + \lambda z') \qquad \text{car } (x, y, z) \in F \text{ et } (x', y', z') \in F \end{aligned}$$

Donc $u + \lambda v \in F$

F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

2.

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ 4x - y = -z\} \\ &= \{(x, y, -4x + y) / \ x, y \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x, 0, -4x) + (0, y, y) / \ x, y \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(1, 0, -4) + y(0, 1, 1) / \ x, y \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \mathrm{Vect}\,((1, 0, -4), (0, 1, 1)) \end{aligned}$$

La famille $((1, 0, -4), (0, 1, 1))$ est une famille génératrice de F. Montrons que cette famille est libre. On pose $u_1 = (1, 0, -4)$ et $u_2 = (0, 1, 1)$.
Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = (0, 0, 0) &\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, -4\alpha_1 + \alpha_2) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 & = 0 \\ \alpha_2 & = 0 \\ -4\alpha_1 + \alpha_2 & = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

La famille $((1, 0, -4), (0, 1, 1))$ est libre. Puisqu'elle est aussi génératrice, c'est donc une base de F. La dimension de F est le cardinal d'une base de F donc on en conclut que $dim(F) = card((1, 0, -4), (0, 1, 1)) = 2$

Exercice 2. 7 pts

On considère $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(2) - P(1), P(4)) \end{cases}$.

1. Montrer que f est une application linéaire. (1 pt)
2. f est-elle une forme linéaire ? f est-elle un endomorphisme ? (0.25pts + 0.25pts)
3. Donner les base canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$. Expliciter une famille génératrice de l'image de f. (0.5pts + 1 pts)

On définit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$

4. Calculer le déterminant de M. (1pts)
5. Si cela est possible, calculer M^{-1}. (3pts)

<u>Correction.</u>

1. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_2[X], \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(P+\lambda Q) &= ((P+\lambda Q)(0), (P+\lambda Q)(2) - (P+\lambda Q)(1), (P+\lambda Q)(4)) \\ &= (P(0)+\lambda Q(0), P(2)-P(1)+\lambda(Q(2)-Q(1)), P(4)+\lambda Q(4)) \\ &= f(P)+\lambda f(Q) \end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire.

2. f n'est pas une forme linéaire car l'espace d'arrivée n'est pas $\mathbb{R}$. f n'est pas un endomorphisme car les espaces de départ et d'arrivée sont différents.

3. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_2[X]} = (1, X, X^2)$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$. Déterminons une famille génératrice de l'image de f.
 — $f(1) = (1,0,1)$
 — $f(X) = (0, 2-1, 4)$
 — $f(X^2) = (0, 2^2-1^2, 4^2) = (0,3,16)$

D'où $Im(f) = \text{Vect}((1,0,1),(0,2-1,4),(0,3,16))$

4. Pour calculer le déterminant de M, développons par rapport à la 1ère ligne.

$$det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = 16 - 3 \times 4 = 4$$

5. M est inversible car $det(M) \neq 0$.

On applique la méthode du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 16 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{4}L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & 4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & 4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 4 & -1/4 & -1 & 1/4 \end{array}\right)$$

Nous trouvons donc que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 4 & -3/4 \\ -1/4 & -1 & 1/4 \end{pmatrix}$.