Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, Mathématiques et Calcul 2 (MC2)

Interrogation 1 : Géométrie et intégrales

Exercice 1. 5 pts

Soient $u = (1, 2, 1), v = (-2, 0, 1)$.

1. Donner un vecteur orthogonal à u. (1 pt)
2. Calculer le produit vectoriel $u \wedge v$. (1 pt)
3. u et v sont-ils colinéaires ? Justifier. (1 pt)
4. Donner les définitions ensemblistes du plan vectoriel engendré par u et v à l'aide des équations paramétriques et cartésiennes. (avec justification) (2 pt)

Correction.

1. Un vecteur orthogonal à u est (1,0,-1).
On peut vérifier le résultat : $(1, 2, 1) \cdot (1, 0, -1) = 1 \times 1 + 2 \times 0 + 1 \times (-1) = 0$

2. $u \wedge v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 - 1 \times 0 \\ 1 \times (-2) - 1 \times 1 \\ 1 \times 0 - 2 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

3. On suppose que u et v sont colinéaires. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$.

$$\begin{aligned} u = \lambda v \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -2 &= 1\lambda \\ 0 &= 2\lambda \\ 1 &= 1\lambda \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda &= -2 \\ \lambda &= 0 \\ \lambda &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On aboutit à une contradiction. Donc u et v ne sont pas colinéaires.

4. Ces vecteurs sont non colinéaires, ils engendrent donc bien un plan.
Définition paramétrique : $\mathcal{P} = \{\lambda u + \mu v / \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
Définition cartésienne :
Le plan est décrit comme l'ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur w. On utilise le produit vectoriel $u \wedge v = (2, -3, 4)$ ici.
D'où

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ w \cdot (x, y, z) = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ 2x - 3y + 4z = 0\} \end{aligned}$$

Exercice 2. 5 pts

1. Donner une primitive de $t \mapsto t^2 e^{t^3}$. (1.5 pt)

2. Ecrire sous la forme de somme de Riemann et calculer la limite de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3 + k^3}$. (3.5 pts)

Correction.

1. Posons $f : t \mapsto t^2 e^{t^3}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

On reconnait la forme $(e^u)' = u'e^u$. Donc une primitive de f est : $t \mapsto \dfrac{1}{3}e^{t^3}$

2.

3. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k^3} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3(1+(\frac{k}{n})^3)} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k^2}{n^2}}{1+(\frac{k}{n})^3} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \end{aligned}$$

avec $f : x \in [0,1] \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^3}$.

S_n est donc une somme de Riemann. f étant continue sur [0,1], $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$ existe et on a :

$$\begin{aligned} \lim_n\ S_n &= \int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\ dx \\ &= \left[\frac{1}{3}\ln(1+x^3)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\ln(1+1^3) - \frac{1}{3}\ln(1+0^3) \\ &= \frac{1}{3}\ln(2) \end{aligned}$$
