Université Paris Cité
Licence 1ère année
2024-2025

Interro n°2 - Mathématiques et Calcul 2 (MC2)

Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.
Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1. (0.5 + 2 + 1.5) pts

1. Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $u \cdot v$. Que peut-on dire des vecteurs u et v ?
   (b) Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ engendré par les vecteurs u et v.
2. Donner une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au vecteur $n = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Correction.

1. (a) $u \cdot v = 1 \times 6 + (-2) \times 3 + 0 \times 1 = 0$. u et v sont orthogonnaux.
   (b) On a $\mathcal{P} = \left\{ \lambda u + \mu v \in \mathbb{R}^3 : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$. Pour obtenir une équation cartésienne de $\mathcal{P}$, cherchons un vecteur n orthogonal à $\mathcal{P}$. Par définition de $\mathcal{P}$, n doit être à la fois orthogonal à u et à v. On prend $n = u \wedge v = \begin{pmatrix} (-2) \times 1 - 0 \times 3 \\ 0 \times 6 - 1 \times 1 \\ 1 \times 3 - (-2) \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix}$ (on vérifie que $u \cdot n = v \cdot n = 0$), et on a donc $\mathcal{P} = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 : w \cdot n = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : -2x - y + 15z = 0 \right\}$.
2. On a $\mathcal{D} = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : u \cdot n = 0 \right\}$. Pour obtenir une équation paramétrique de $\mathcal{D}$, cherchons un vecteur v directeur de $\mathcal{D}$. Par définition de $\mathcal{D}$, il suffit de trouver un vecteur non nul orthogonal à n. On prend $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ car on a bien dans ce cas $v \cdot n = 2 \times 3 + 3 \times (-2) = 0$. On a alors $\mathcal{D} = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2. 4 pts

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$. Montrer que $(S_n)_{n \geq 1}$ converge et calculer sa limite.

Correction.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n(1+\frac{k}{n})}{n^2(1+(\frac{k}{n})^2)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1+\frac{k}{n}}{1+(\frac{k}{n})^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)$ en posant $g : x \in [0,1] \longmapsto \dfrac{1+x}{1+x^2}$.

La fonction g est continue sur $[0,1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$ existe, et S_n est une somme de Riemann donc la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$. D'où,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{2x}{2(1+x^2)}\mathrm{d}x &= [\arctan(x)]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 \\
&= \arctan(1) - \arctan(0) + \frac{1}{2}(\ln(2) - \ln(1)) \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}
\end{aligned}$$

On a donc $S_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\ln(2)}{2}$.

Exercice 3. (2 + (1.5)) pts

1. Donner une primitive de $f : t \longmapsto \sin^2(2t)\cos^3(2t)$.
2. Donner une primitive de $f : t \longmapsto \sin^4(2t)$.

Correction.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin^2(2t)\cos(2t)\left(1-\sin^2(2t)\right) = \sin^2(2t)\cos(2t) - \sin^4(2t)\cos(2t) \\ &= \frac{1}{6}\left(2\times 3\cos(2t)\sin^2(2t)\right) - \frac{1}{10}\left(2\times 5\cos(2t)\sin^4(2t)\right) \end{aligned}$$

donc la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{6}\sin^3(2t) - \dfrac{1}{10}\sin^4(2t)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, en utilisant les formules d'Euler,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2^4}\left(e^{2it}-e^{-2it}\right)^4 \\ &= \frac{1}{2^4}\left(e^{8it} - 4e^{6it}e^{-2it} + 6e^{4it}e^{-4it} - 4e^{2it}e^{-6it} + e^{-8it}\right) \\ &= \frac{1}{2^4}\left(e^{8it} - 4e^{4it} + 6 - 4e^{-4it} + e^{-8it}\right) \\ &= \frac{1}{2^4}\left(e^{8it} + e^{-8it} - 4(e^{4it}+e^{-4it}) + 6\right) \\ &= \frac{1}{2^4}\left(2\cos(8t) - 8\cos(4t) + 6\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\cos(8t) - 4\cos(4t) + 3\right) \end{aligned}$$

donc la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{64}\sin(8t) - \dfrac{1}{8}\sin(4t) + \dfrac{3t}{8}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.