Université Paris Cité
Licence 1ère année
2024-2025

Interro n°4 - Mathématiques et Calcul 2 (MC2)
Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.
Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1. 2 pts
Calculer $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)^2}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $u = \ln(x)$.

Correction.

Posons $f : x \to \dfrac{1}{x\ln(x)^2}$. f est définie et continue sur $[2, +\infty[$ donc $I = \displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est une intégrale impropre en $+\infty$. 0.5 pts

Pour effectuer le changement de variable indiqué dans l'énoncé, on pose, pour tout $t \in [2, +\infty[$,

$$F(t) = \int_2^t f(x)\mathrm{d}x$$

De sorte que $I = \displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t)$. 0.5 pts

On effectue ensuite le changement de variable $u = \ln(x)$ ($\mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$) :

$$F(t) = \int_2^t \frac{1}{x\ln(x)^2}\mathrm{d}x = \int_2^t \frac{1}{\ln(x)^2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int_{\ln(2)}^{\ln(t)} \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{u}\right]_{\ln(2)}^{\ln(t)} = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(t)}$$

Finalement, $I = \displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(t)}\right) = \frac{1}{\ln(2)}$. 1 pt

---

Exercice 2. 2.5 pts
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)$.

Correction.

$u_n = (-1)^n \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) = (-1)^n \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)$ est défini pour tout $n \geq 1$ et de signe non-constant. 0.5 pts

Par ailleurs, $|u_n| = \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{n}$ ($\arctan(x) \underset{x\to0}{\sim} x$ et $\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x$). Or, $\sum \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente donc, par équivalence, $\sum |u_n|$ diverge, c'est-à-dire $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

Cependant, en posant, pour tout $n \geq 1$, $a_n = \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)$ tel que $u_n = (-1)^n a_n$, on remarque que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus, $(a_n)_{n\geq1}$ est une suite à termes positifs et, puisque $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante mais $y \mapsto \arctan(y)$ et $y \mapsto \ln(1 + 2y)$ sont croissantes, $(a_n)_{n\geq1}$ est décroissante, par composition. Ainsi, par le critère de séries alternées, $\sum u_n$ converge. 2 pts

---

Exercice 3. 2 pts
Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{n(n+2)}$ converge et calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

Correction.

$u_n = \dfrac{1}{n(n+2)}$ qui est défini pour tout $n \geq 1$ et positif.

On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$. Or, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$) donc, par équivalence, $\sum \dfrac{1}{n(n+2)}$ converge. 0.5 pts

Pour caculer la somme, on a, par décomposition en éléments simples, que, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \quad \text{0.5 pts}$$

Ainsi, pour tout $N \geq 3$,

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i} - \sum_{i=3}^{N+2}\frac{1}{i}\right) \quad \text{(changements d'indice } i = n \text{ et } i = n+2\text{, respectivement)} \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{i=3}^{N}\frac{1}{i}\right) - \left(\sum_{i=3}^{N}\frac{1}{i} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right) \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right)
\end{aligned}$$

Finalement, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \lim_{N\to+\infty} S_N = \frac{3}{4}$. 1 pt

---

Exercice 4. (1.25 + 2.25) pts

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(1+x^2)y'(x) + xy(x) = 0, x \in \mathbb{R} \quad (E_1)$
2. $4y'(x) + 2y(x) = x^2 - 1, x \in \mathbb{R} \quad (E_2)$

Correction.

1. L'équation homogène (E_1) est équivalente à l'équation normalisée :

$$y'(x) + \frac{x}{1+x^2}y(x) = 0, x \in \mathbb{R}. \quad (\text{car } 1 + x^2 > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}) \ \text{0.5 pts}$$

Une primitive de $\alpha : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ est $A : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_1) est :

$$\left\{ y_C : x \in \mathbb{R} \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} \mid C \in \mathbb{R} \right\} \ \text{0.75 pts}$$

2. **1$^{\text{ère}}$ étape :** L'équation homogène associée à (E_2) :

$$y(x)' + \frac{1}{2}y(x) = 0, x \in \mathbb{R}.$$

admet pour solutions les fonctions de la forme $y_C : x \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}x}$ où $C \in \mathbb{R}$. 0.5 pts

2$^{\text{ème}}$ étape : Le second membre étant un polynôme de dégré 2, on cherche **une** solution particulière de la forme $y_p : x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2 + bx + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ 0.25 pts. Pour déterminer a, b et c, on injecte y_p dans (E_2). On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_p'(x) = 2ax + b$. D'où :

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R},\ 4y_p'(x) + 2y_p(x) = x^2 - 1 \\ \iff & \forall x \in \mathbb{R},\ 4(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 - 1 \end{aligned}$$

En regroupant par exposant, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(2a - 1)x^2 + (8a + 2b)x + (4b + 2c + 1) = 0 \text{ 0.5 pts}$$

Un polynôme identiquement nul est le polynôme nul. Ainsi, ses coefficients sont tous nuls et on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2a - 1 = 0 \\ 8a + 2b = 0 \\ 4b + 2c + 1 = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -4a = -2 \\ c = -(4b + 1)/2 = 7/2 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $y_p : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + \dfrac{7}{2}$ est **une** solution particulière de (E_2) 0.5 pts (**Attention** à vérifier que y_p est bien solution de (E_2) pour s'assurer qu'il n'y pas eu d'erreurs de calcul dans la résolution du système).

Conclusion : Finalement, l'ensemble des solutions de (E_2) est :

$$\left\{ y : x \in \mathbb{R} \mapsto y_p(x) + y_C(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{7}{2} + Ce^{-\frac{1}{2}x} \mid C \in \mathbb{R} \right\} \text{ 0.5 pts}$$
