Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, MATHÉMATIQUES ET CALCUL 2 (MC2)

Interrogation 3 : Intégrales

Exercice 1. 7 pts

1. Déterminer la nature de $I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{(\sqrt{1-t})^3} dt$
2. Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$ à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$.

⚠Pas de changements de variable ou d'IPP sur des bornes impropres !

Correction.

1. $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{(\sqrt{1-t})^3}$ est définie, continue et négative sur $]0,1[$. On va donc considérer $g = -f$ pour travailler avec une fonction positive et, $J = \int_0^1 g(t)dt = -I$ étant impropre en 0 et en 1, on divise l'intégrale en deux pour se ramener à l'étude de deux intégrales impropres en une seule de leurs bornes en introduisant $J_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} g(t)dt$ et $J_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 g(t)dt$, de sorte que $J = J_1 + J_2$.

• **Étude sur** $[\frac{1}{2}, 1[$:
On effectue un changement de variable pour se ramener à l'étude d'une intégrale impropre en 0.
Soit $x \in [\frac{1}{2}, 1[$. On note $F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x g(t)dt$, de sorte que $\int_{\frac{1}{2}}^1 g(t)dt = \lim_{x\to 1} F(x)$.
On effectue le changement de variable $u = 1 - t$ $(du = -dt)$:

$$F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x g(t)dt = -\int_{\frac{1}{2}}^x \frac{\ln(t)}{(\sqrt{1-t})^3} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1-x} \frac{\ln(1-u)}{(\sqrt{u})^3} du = \int_{1-x}^{\frac{1}{2}} \frac{-\ln(1-u)}{(\sqrt{u})^3} du$$

Ainsi, $J_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 g(t)dt = \lim_{x\to 1} F(x) = \lim_{x\to 1} \int_{1-x}^{\frac{1}{2}} \frac{-\ln(1-u)}{(\sqrt{u})^3} du = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-\ln(1-u)}{(\sqrt{u})^3} du$

Posons $h : u \mapsto \frac{-\ln(1-u)}{(\sqrt{u})^3}$ qui est définie, continue et postive sur $]0, \frac{1}{2}]$. Or, $-\frac{\ln(1-u)}{(\sqrt{u})^3} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{u}{u^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}$ et $\int_0^1 \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} du$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$), donc $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} du$ converge (car $u \mapsto \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}$ continue sur $[\frac{1}{2}, 1]$) et, par critère d'équivalence des fonctions positives, $\int_0^{\frac{1}{2}} h(u)du$ converge. D'où, J_2 converge.

• **Étude sur** $]0, \frac{1}{2}]$:
On a $g(t) = -\frac{\ln(t)}{(\sqrt{1-t})^3} \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t) = \xi(t)$ avec ξ définie, continue et positive sur $]0, \frac{1}{2}]$. De plus, $\int_0^{\frac{1}{2}} \xi(t)dt$ converge car une primitive de ln est $t \mapsto t\ln(t) - t$, qui tend vers 0 quand $t \to 0$ et vaut -1 pour $t = 1$ (pour s'en convaincre, il suffit de faire une IPP avec $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = 1$). Donc, par critère d'équivalence des fonctions positives, J_1 converge.
• **Conclusion :** Finalement, $J = J_1 + J_2$ est une intégrale convergente, donc $I = -J$ aussi.

2. On pose $f : t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$. f est définie, continue et positive sur $[0, +\infty[$. $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est donc impropre en $+\infty$.
• **Convergence de l'intégrale :** Puisque $t^2 e^{-\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, il existe $T > 0$ tel que, pour tout $t \geq T$, $t^2 e^{-\sqrt{t}} \leq 1$, d'où $e^{-\sqrt{t}} \leq \frac{1}{t^2}$. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$). Donc, par critère de majoration (f positive), $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente donc $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge (car f est continue sur $[0, 1]$).
• **Calcul de l'intégrale :** Procédons à un changement de variable, comme indiqué dans l'énoncé.

Soit $x \in [0,+\infty[$. On note $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, de sorte que $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} F(x)$.
On effectue le changement de variable $u = \sqrt{t}$ ($dt = 2udu$) :

$$F(x) = \int_0^x e^{-\sqrt{t}}dt = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u}2udu$$

On procède ensuite à une IPP avec $\alpha(u) = 2u$ et $\beta'(u) = e^{-u}$:

$$\begin{aligned}
F(x) &= [\alpha(u)\beta(u)]_0^{\sqrt{x}} - \int_0^{\sqrt{x}} \alpha'(u)\beta(u)du \\
&= [-2ue^{-u}]_0^{\sqrt{x}} - 2\int_0^{\sqrt{x}} (-e^{-u})du \\
&= -2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} - 2[e^{-u}]_0^{\sqrt{x}} \\
&= -2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}} + 2
\end{aligned}$$

Ainsi, $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}(-2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}} + 2) = 2$ (car $\lim_{u\to+\infty} ue^{-u} = 0$, par croissances comparées).
Remarque : *En fait, calculer l'intégrale consiste à revenir à la définition d'une intégrale impropre, donc à déterminer sa nature. Ici, cela montre directement la convergence de l'intégrale impropre, de sorte que déterminer la nature de l'intégrale sans la calculer dans un premier temps est superflu.*

Exercice 2. 3 pts

1. Calculer $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+1}dx$

Correction.

On pose $f : x \mapsto \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+1}$. f est définie, continue sur $[0,1]$ donc admet des primitives sur cet intervalle. On effectue le changement de variable $t = e^x$ ($dx = \frac{1}{t}dt$) :

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+1}dx = \int_1^e \frac{1}{t^2+t+1}dt$$

On reconnaît une fraction rationnelle de la forme suivante : inverse d'un polynôme de degré 2 sans racines réelles (i.e. irréductible).
• **Mise sous forme canonique du polynôme au dénominateur :**

$$\begin{aligned}
t^2+t+1 &= t^2 + 2\times\frac{1}{2}\times t + (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 + 1 \\
&= (t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \\
&= \frac{3}{4}((\frac{2}{\sqrt{3}})^2(t+\frac{1}{2})^2 + 1) \\
&= \frac{3}{4}((\frac{2t+1}{\sqrt{3}})^2 + 1)dt
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_1^e \frac{1}{t^2+t+1}dt = \frac{4}{3}\int_1^e \frac{1}{(\frac{2t+1}{\sqrt{3}})^2+1}$$

On réalise le changement de variable $u = \frac{2t+1}{\sqrt{3}}$ ($du = \frac{2}{\sqrt{3}} dt$). D'où,

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{1}{t^2+t+1} dt &= \frac{4}{3} \int_1^e \frac{1}{(\frac{2t+1}{\sqrt{3}})^2+1} dt \\
&= \frac{4}{3} \int_{\sqrt{3}}^{\frac{2e+1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{u^2+1} \frac{\sqrt{3}}{2} du \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} [\arctan u]_{\sqrt{3}}^{\frac{2e+1}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(\frac{2e+1}{\sqrt{3}}) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3})
\end{aligned}$$
