Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, Mathématiques et Calcul 2 (MC2)

**Interrogation 3 : Séries numériques et équations différentielles**

**Exercice 1.** 5 pts

1. Déterminer la nature de $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (1 pt)

2. Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (4 pt)

**Correction.**

1. Pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$.
$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$.
On reconnait une série de Riemann convergente (3>1), donc par critère d'équivalence, la série $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge.

2. Par une décomposition en éléments simples,

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$$

Soit $N \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1/2}{n} - \frac{1/2}{n+1} + \frac{1/2}{n+2} - \frac{1/2}{n+1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

On reconnait 2 sommes téléscopiques. Etudions la première.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} \text{ en faisant le changement de variable k=n+1} \\
&= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} + \frac{1}{1} - \left(\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k} + \frac{1}{N+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{N+1}
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{N+2} - \frac{1}{2}$$

D'où

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{N+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+2}-\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}\right)\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

---

**Exercice 2.** 5 pts

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $(E_1) : \frac{1}{2}y'(x)+\frac{x}{1+x^2}y(x)=0,\ x\in\mathbb{R}$ (2 pts)
2. $(E_2) : y'(x)+3y(x)=xe^{-3x},\ x\in\mathbb{R}$ (3 pts)

**Correction.**

1. On écrit l'équation différentielle normalisée :

$$y'(x)+\frac{2x}{1+x^2}y(x)=0$$

.

On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène avec pour coefficient $\alpha : x\mapsto \frac{2x}{1+x^2}$.

$\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitive sur $\mathbb{R}$ et une primitive de $\alpha$ est $A : x\mapsto \ln(1+x^2)$.

L'ensemble des solutions de $(E_1)$ est :

$$\begin{aligned}S_1 &= \{y : x\mapsto Ke^{-\ln(1+x^2)}/K\in\mathbb{R}\}\\ &= \{y : x\mapsto K\frac{1}{1+x^2}/K\in\mathbb{R}\}\end{aligned}$$

2. L'équation homogène associée à $(E_2)$ est

$$(E_2^0) : y'(x)+3y(x)=0$$

Le coefficient de cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène est $\alpha : x\mapsto 3$.

$\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitive sur $\mathbb{R}$ et une primitive de $\alpha$ est $A : x\mapsto 3x$,.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $(E_2^0)$ est :

$$S_2^0=\{y_0 : x\mapsto Ke^{-3x}/K\in\mathbb{R}\}$$

On cherche une solution particulière $y_p$ de $(E_2)$ de la forme $y_p(x)=Q(x)e^{-3x}$ avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ (pas d'hypothèses sur le degré du polynôme).

La dérivée de $y_p$ est : $y'(p)=Q'(x)e^{-3x}-3Q(x)e^{-3x}$

En injectant dans $(E_2)$, on obtient :

$$\begin{aligned}Q'(x)e^{-3x}-3Q(x)e^{-3x}+3Q(x)e^{-3x}=xe^{-3x} &\iff Q'(x)e^{-3x}=xe^{-3x}\\ &\iff Q'(x)=x\end{aligned}$$

Une primtive de $Q' : x \mapsto x$ est $Q : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$

D'où $y_p : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}e^{-3x}$

**Conclusion :** L'ensemble des solutions de $(E_2)$ sont :

$$\begin{aligned} S_2 &= \{y_0(x) + y_p(x) / K \in \mathbb{R}\} \\ &= \{Ke^{-3x} + \frac{x^2}{2}e^{-3x} / K \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(K + \frac{x^2}{2})e^{-3x} / K \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

---