Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, Mathématiques et Calcul 2 (MC2)
Interrogation 1 : Algèbre linéaire

Exercice 1. (3 pts)
On considère $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y = 0 \text{ et } z + t = 0\}$.
1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de F ainsi que la dimension de F (avec justification).

Correction.
1. On peut voir F comme l'intersection de deux sous-espaces vectoriels :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y = 0\} \cap \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z + t = 0\}$$

Intuition : L'intersection de s.e.v est un s.e.v.

— **F est non vide :** Le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^4} = (0, 0, 0, 0)$ vérifie les équations de F :

$$\begin{cases} 0 - 2 \times 0 = 0 \\ 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

Donc $0_{\mathbb{R}^4} \in F$.

— **Stabilité par combinaison linéaire $(u + \lambda v)$:** Soient $u = (x, y, z, t)$ et $v = (x', y', z', t')$ deux vecteurs de F, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Puisque $u \in F$ et $v \in F$, alors

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' - 2y' = 0 \\ z' + t' = 0 \end{cases}$$

On considère le vecteur $w = u + \lambda v$. Ses coordonnées sont :

$$w = (x + \lambda x',\ y + \lambda y',\ z + \lambda z',\ t + \lambda t')$$

Vérifions si w satisfait les équations de F :

1ère équation :

$$(x + \lambda x') - 2(y + \lambda y') = \underbrace{(x - 2y)}_{=0} + \lambda \underbrace{(x' - 2y')}_{=0} = 0$$

2ème équation :

$$(z + \lambda z') + (t + \lambda t') = \underbrace{(z + t)}_{=0} + \lambda \underbrace{(z' + t')}_{=0} = 0$$

Les deux conditions sont vérifiées, donc $u + \lambda v \in F$.

Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2.

$$\begin{aligned} F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y = 0 \text{ et } z + t = 0\} &\iff F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 2y \text{ et } z = -t\} \\ &\iff F = \{(2y, y, -t, t) \mid y, t \in \mathbb{R}\} \\ &\iff F = \{y(2, 1, 0, 0) + t(0, 0, -1, 1) \mid y, t \in \mathbb{R}\} \\ &\iff F = \text{Vect}((2, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)) \end{aligned}$$

Les 2 vecteurs formant la famille sont non colinéaires donc la famille est libre. De plus par définition du sous espace vectoriel engendré elle est génératrice. Elle forme donc une base de F et $\dim(F) = 2$

Exercice 2. (3 pts)
Soit $\mathcal{F} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 2, 1)\}$.
1. La famille est-elle libre ? Est-elle liée ?
2. Si elle est libre la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$. Si elle est liée, en extraire une famille libre.

Correction.

1. Avant de se lancer dans une preuve, on regarde si l'on trouve une relation entre les vecteurs. On remarque ques $(1,1,0)+(0,1,1)=(1,2,1)$. **La famille $\mathbb{F}$ est donc liée**.

2. Pour extraire une famille libre, on retire le vecteur $(1,2,1)$ qui est combinaison linéaire des deux autres. Considérons la famille $\mathcal{F}'=\{(1,1,0),(0,1,1)\}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (les zéros ne sont pas aux mêmes positions). **La famille $\mathcal{F}'$ est donc libre**.

Exercice 3. (4 pts)
Déterminer si les applications suivantes sont linéaires ou non. Dans le cas où l'application est linéaire, donner une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$ et vérifier la cohérence avec le théorème du rang.

a) $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ P & \longmapsto & \min\limits_{x\in[0,1]} P(x)\end{array}$ b) $f:\begin{array}{ccc}M_{42}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_{42}(\mathbb{R})\\ M & \longmapsto & M^2\end{array}$

c) $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y\end{array}$

Correction.

1. **Non linéaire.** Contre-exemple : Soit $P(X)=X$ et $Q(X)=1-X$. On a que $f(P)=\min\limits_{x\in[0,1]} P(x)=0$ et $f(Q)=\min\limits_{x\in[0,1]} Q(x)=0$, donc $f(P)+f(Q)=0$. Or $f(P+Q)=(P+Q)(X)=1$. On a bien $f(P+Q)\neq f(P)+f(Q)$.
2. **Non linéaire.** Contre-exemple (non homogénéité) : Soit $M=I_{42}$ et $\lambda=2$. $f(2I_{42})=(2I_{42})^2=4I_{42}$. $2f(I_{42})=2(I_{42})^2=2I_{42}$. Donc $f(2M)\neq 2f(M)$.
3. **Linéaire.** Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}f((x,y,z)+\lambda(x',y',y')) &= f(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')\\ &= x+\lambda x'+y+\lambda y'\\ &= x+y+\lambda(x'+y')\\ &= f(x,y,z)+\lambda f(x',y',z')\end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire.

— **Noyau :**

$$\begin{aligned}\ker(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=0\} &\iff \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=0\}\\ &\iff \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-y\}\\ &\iff \{(-y,y,z) \mid y,z\in\mathbb{R}\}\\ &\iff \{y(-1,1,0)+z(0,0,1) \mid y,z\in\mathbb{R}\}\\ &\iff \mathrm{Vect}((-1,1,0),(0,0,1))\end{aligned}$$

Ces 2 vecteurs sont non colinéaires, ils forment donc une famille libre. La famille est donc une base de $\ker(f)$ et $\dim(\ker(f))=2$.

— **Image :**

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f)=\{f(x,y,z) \mid (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\} &\iff \{x+y \mid (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}\\ &\iff \mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(1)\\ &\iff \mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}\end{aligned}$$

Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est la famille composée du scalaire 1, et donc $\dim(\mathrm{Im})(f)=1$

— **Théorème du rang :** $\dim(\mathbb{R}^3)=\dim(\ker(f))+\dim(\mathrm{Im}(f)) \iff 3=2+1$.
