Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, MATHÉMATIQUES ET CALCUL 1 (MC1)

Interrogation 3 : Complexes et Polynômes

Exercice 1. (≈ 4 pts)

1. Déterminer les racines carrées de $5-12i$

2. Donner le module et un argument de $1+e^{i\theta}$

Correction.

1. Soit $\delta = a+ib$ une racine carré de $5-12i$, c'est à dire $(a+ib)^2 = 5-12i$. On développe :

$$(a+ib)^2 = 5-12i \iff a^2-b^2+2aib = 5-12i$$

Par identification, on obtient $a^2-b^2 = 5$ et $2ab = -12$.
De plus, on a l'égalité des modules $|\delta|^2 = |5-12i| \iff a^2+b^2 = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$.
En additionnant les équations $a^2-b^2 = 5$ et $a^2+b^2 = 13$, on obtient $2a^2 = 18$ d'où $a = 3$ ou $a = -3$.
Puisque $2ab = -12$, a et b sont de signes contraires, on a $b = -\frac{6}{a}$ et on en déduit que les solutions sont $a = 3$ et $b = -2$ ou $a = -3$ et $b = 2$.
Conclusion : Les racines carrées de $5-12i$ sont $3-2i$ et $-3+2i$.

2. On utilise la technique de l'angle moitié :

$$\begin{aligned} 1+e^{i\theta} &= e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}) \\ &= e^{i\frac{\theta}{2}}2\cos(\frac{\theta}{2}) \end{aligned}$$

Donc le module est $2\cos(\frac{\theta}{2})$ et un argument est $\frac{\theta}{2}$

Exercice 2. (≈ 4 pts)

1. Factoriser dans $\mathbb{C}$, $X^2-2iX-1+2i$

2. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de X^5-X^2+2 par X^2+1

Correction.

1. Le discriminant est $\Delta = (-2i)^2-4(-1+2i) = -4+4-8i = -8i$.
Puisque $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, on en déduit que $\Delta = 8e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Donc les racines de Δ sont $-\sqrt{8}e^{-i\frac{\pi}{4}} = -2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{8}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
D'où
$$X^2-2iX-1+2i = (X-2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})(X+2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})$$
ou sous forme algébrique

$$X^2-2iX-1+2i = (X-2(1-i))(X+2(1-i))$$

2.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & X^5 & & -X^2 & & +2 & X^2 \quad +1 \\
\cline{7-7}
- & (X^5 & +X^3 & & &) & X^3 \quad -X \quad -1 \\
\cline{1-6}
 & & -X^3 & -X^2 & & +2 & \\
- & (& -X^3 & & -X &) & \\
\cline{1-6}
 & & & -X^2 & +X & +2 & \\
- & (& & -X^2 & & -1) & \\
\cline{1-6}
 & & & & X & +3 &
\end{array}
$$

D'où $X^5 - X^2 + 2 = (X^2 + 1)(X^3 - X - 1) + X + 3$

Exercice 3. ($\approx$ 2 pts)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, α une racine de P de multiplicité $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Donner deux caractérisations équivalentes du fait que α soit une racine de P de multiplicité k.

Correction.

- Il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^k Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$
- $P(\alpha) = P'(\alpha) = ... = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.
